ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΕΤΟΥΣ 2005
ΚΛΑΔΟΣ ΠΕ 03 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ
«Γνωστικό Αντικείμενο»
ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Να απαντήσετε στα επόμενα τέσσερα (4) ισοδύναμα ερωτήματα

ΕΡΩΤΗΜΑ 1^{ο} :

α) Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ έτσι ώστε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$

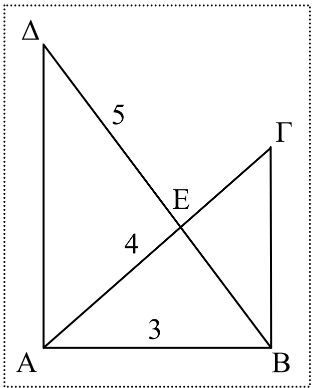
β) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(2)=3^{-10}$. Να δείξετε ότι υπάρχει θετικός αριθμός α τέτοιος ώστε για κάθε $x\in(2-\alpha,\ 2+\alpha)$ η $f(x)$ είναι θετική.

γ) Να βρεθούν οι τιμές του $m\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η εξίσωση $x^4-(3m+2)x^2+m^2=0$ να έχει 4 πραγματικές ρίζες οι οποίες να αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2^{ο}

α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες (παραγοντική ολοκλήρωση) στο κλειστό διάστημα [α, β] .

β) Στο διπλανό σχήμα οι ΑΔ και ΒΓ είναι κάθετες στην ΑΒ και $AB=3$, $A\Gamma=4$, $B\Delta=5$. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Ε από την ευθεία ΑΒ.



γ) Αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1α .

Αν m, M είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο διάστημα [α, β], τότε για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $m\le f(x)\le M$ οπότε:

$$\int_\alpha^\beta m\,dx \le \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \le \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \ \text{ ή } \ m(\beta-\alpha)\le\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \le M(\beta-\alpha)\ ,\ \alpha<\beta$$

ή $m\le \dfrac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \le M \quad (1)$.

Αν $m=M$ τότε $\dfrac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = f(x_\varepsilon)=f(x_\mu)$, (όπου $f(x_\varepsilon)=m,\ f(x_\mu)=M$)

οπότε $\xi=x_\varepsilon$ ή $\xi=x_\mu$

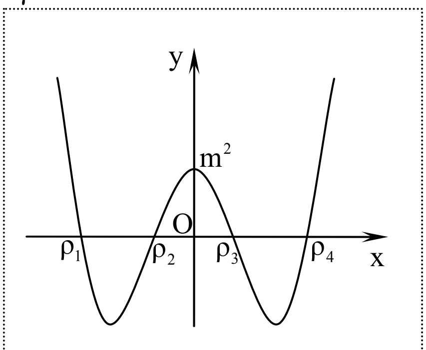
Αν $m\ne M$ τότε επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] από την (1) και το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx \text{ ή } \int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx=f(\xi)(\beta-\alpha).$$

Σχόλια – Παρατηρήσεις
Μία δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού αναφέρεται στο βιβλίο του Ο.Ε.Δ.Β. που διδάσκεται τώρα στα σχολεία. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΤΑΞΗ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ, (§ 3.6 σελίδα 340), με τη διαφορά ότι $\xi\in(\alpha,\beta)$.
Η απόδειξη που αναφέρουμε είναι σύμφωνα με αυτή που υπάρχει στο προηγούμενο σχολικό βιβλίο του Ο.Ε.Δ.Β. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΝΑΛΥΣΗ, σελίδα 242, (Κατσαργύρης Βασίλειος, Μεντής Κωνσταντίνος , Παντελίδης Γεώργιος, Σουρλάς Κωνσταντίνος).
Παρατήρηση:
Κατά την απόδειξη του θεωρήματος μέσης τιμής ολοκληρωτικού λογισμού, αναφέρεται ότι σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ στην απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής, (§ 3.4 σελίδα 88), αναφέρεται ότι $\xi\in(\alpha,\beta)$.
(Ελπίζουμε να δοθούν στους διορθωτές οδηγίες για επιείκεια στο σημείο αυτό).

1β.
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=2$ οπότε σύμφωνα με τον ορισμό της συνέχειας σε σημείο έχουμε:
Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\alpha>0$, που εξαρτάται από το ε τέτοιο ώστε για κάθε x με $|x-2|<\alpha\Leftrightarrow x\in(2-\alpha,\,2+\alpha)$, να ισχύει $|f(x)-f(2)|<\varepsilon$ (1)
$(1)\Leftrightarrow -\varepsilon<f(x)-3^{-10}<\varepsilon\Leftrightarrow 3^{-10}-\varepsilon<f(x)<3^{-10}+\varepsilon$
Θέλουμε να είναι $f(x)>3^{-10}-\varepsilon\geq 0$ οπότε αρκεί να επιλέξουμε κατάλληλα το ε ώστε να είναι $\varepsilon\leq 3^{-10}$.

1γ.



Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^4-(3m+2)x^2+m^2,\ x,m\in\mathbb{R}$.
Η συνάρτηση f είναι άρτια και εξίσωση η $f(x)=0$ έχει 4 πραγματικές ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4$ που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega=2t,\ t>0$
Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Θέτουμε : $\rho_1=-3t$, $\rho_2=-t$, $\rho_3=t$, $\rho_4=3t$

$$\begin{cases}f(\rho_3)=0\\ f(\rho_4)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t^4-(3m+2)t^2+m^2=0\ ,(1)\\ 81t^4-(3m+2)9t^2+m^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-81t^4+81(3m+2)t^2-81m^2=0\ ,(2)\\ 81t^4-9(3m+2)t^2+m^2=0\ ,(3)\end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις (2), (3) και βρίσκουμε ότι:
$t^2=\dfrac{10m^2}{9(3m+2)}$, (4). Από (1) και (4) προκύπτει ότι:

$$(10m)^2=(9m+6)^2\Leftrightarrow m=6,\text{ ή } m=-\frac{6}{19}$$

2 α

Έστω οι συναρτήσεις f, g με συνεχείς παραγώγους στο διάστημα [α, β]. Τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g'(x)dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\cdot g(x)dx$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τον κανόνα παραγώγισης

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

και ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη της ισότητας.

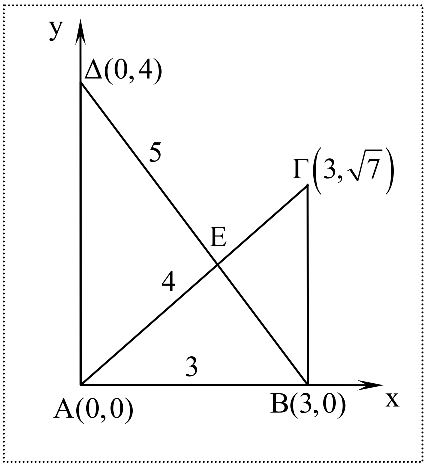
$$\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(x)\cdot g(x)\right]' dx = \int_{\alpha}^{\beta}\left[f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\right]dx$$

$$\Rightarrow \left[f(x)\cdot g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\cdot g(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g'(x)dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\cdot g(x)dx .$$

2 β.

Προσαρμόζουμε το σχήμα σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Είναι $ΒΓ = \sqrt{7}$ και $ΑΔ = 4$ οπότε:

$Α(0,0)$, $Β(3,0)$, $Γ\left(3,\sqrt{7}\right)$, $Δ(0,4)$.

Οι εξισώσεις των ευθειών ΑΓ και ΒΔ είναι

$ΑΓ: y = \frac{\sqrt{7}}{3}x$ και $ΒΔ: y = -\frac{4}{3}x + 4$

Η λύση του συστήματος των δύο ευθειών είναι

$(x,y) = \left(\frac{4\left(4-\sqrt{7}\right)}{3}, \frac{16\sqrt{7}-28}{9}\right)$ και εκφράζει τις συντεταγμένες του σημείου Ε.

Άρα $d(Ε, ΑΒ) = |y| = \frac{16\sqrt{7}-28}{9}$

2 γ

(Βλέπε ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ Ο.Ε.Δ.Β. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο
ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ σελίδα 57).

ΕΡΩΤΗΜΑ 3ο

1. Σωστή απάντηση : δ
2. Σωστή απάντηση : (Κάθε απάντηση θεωρήθηκε σωστή)
3. Σωστή απάντηση : β
4. Σωστή απάντηση : δ
5. Σωστή απάντηση : α
6. Το ερώτημα αποσύρθηκε κατά τη βαθμολόγηση

ΕΡΩΤΗΜΑ 4ο

7. Σωστή απάντηση : β
8. Σωστή απάντηση : δ
9. Σωστή απάντηση : δ
10. Σωστή απάντηση : β
11. Σωστή απάντηση : γ
12. Σωστή απάντηση : β